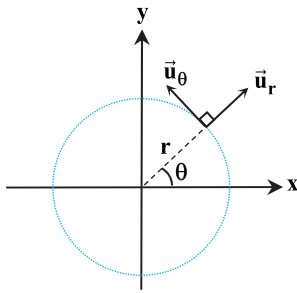


حرکت در مختصات قطبی



در مختصات دکارتی از بردارهای واحد $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ که بردارهایی به طول یک در راستای محورهای مختصات هستند استفاده می‌کنیم. اما اگر بخواهیم معادله‌ی یک منحنی را در دستگاه مختصات قطبی بنویسیم نیاز به بردارهای واحدی داریم که در راستای افزایش r و θ باشند. در شکل مقابل بردارهای $\vec{u}_r$ و $\vec{u}_\theta$ را نشان داده‌ایم. بردار $\vec{u}_r$ در جهت افزایش شعاع یعنی دور شدن از مبدأ است و بردار $\vec{u}_\theta$ جهت مثلثاتی یعنی جهت افزایش θ را نشان می‌دهد. اگر دایره‌ای به شعاع r تصور کنیم، بردار $\vec{u}_\theta$ بر آن مماس است به همین علت به آن بردار یک‌ه‌ی مماسی هم می‌گویند.

بردارهای یک‌ه در مختصات قطبی را می‌توان به این صورت بیان کرد:

$$\vec{u}_r = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}, \quad \vec{u}_\theta = -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j}$$

اگر $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ معادلات پارامتری حرکت یک ذره در دستگاه قطبی باشند، بردارهای سرعت و شتاب بر حسب $\vec{u}_r$ و $\vec{u}_\theta$ از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad \vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta$$

تذکره ۱۲: همان‌طور که می‌دانید بردارهای $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}''(t)$ به ترتیب سرعت و شتاب حرکت را نشان می‌دهند. در فیزیک سرعت را با $\vec{V}(t)$ و شتاب را با $\vec{a}(t)$ نشان می‌دهند. پس می‌توانیم فرمول‌های این بخش را با استفاده از نام‌های فیزیکی بردارها به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} \vec{V}(t) = \vec{R}'(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{R}''(t) \end{cases} \Rightarrow s = \int_a^b |\vec{V}(t)| dt, \quad \kappa = \frac{|\vec{V}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{V}(t)|^3}, \quad \tau = \frac{(\vec{V} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}'}{|\vec{V} \times \vec{a}|^3}, \quad \vec{B}(t) = \frac{\vec{V}(t) \times \vec{a}(t)}{|\vec{V}(t) \times \vec{a}(t)|}$$

مثال ۸۸: می‌دانیم بردار سرعت متحرکی در مختصات قطبی به صورت $\vec{V} = U_r \frac{d\vec{r}}{dt} + U_\theta \vec{r} \frac{d\theta}{dt}$ است. مؤلفه شتاب آن در امتداد شعاع حامل قطبی کدام است؟

(هسته‌ای - سراسری ۷۹)

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2) \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3) \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \vec{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (4) \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم شتاب یک ذره در مختصات از فرمول مقابل به دست می‌آید:

بنابراین مؤلفه شتاب در امتداد شعاع حامل برابر $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ می‌باشد.

مثال ۸۹: متحرکی در صفحه چنان حرکت می‌کند که در لحظه $r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ مقادیر $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{2}$ است. اندازه تصویر بردار سرعت بر روی محور قطبی در این لحظه چقدر است؟

(MBA - سراسری ۸۶)

$$(1) \quad -1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4) \quad 1$$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا بردار سرعت را بر حسب مختصات قطبی به دست می‌آوریم:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta} = \frac{dr}{dt}(\cos \theta, \sin \theta) + r\frac{d\theta}{dt}(-\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{dr}{dt}\cos \theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin \theta, \frac{dr}{dt}\sin \theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos \theta\right)$$

محور قطبی یعنی جهت مثبت محور x ها. اندازه‌ی تصویر بردار $\vec{V}$ روی محور x ها، همان مؤلفه‌ی اول $\vec{V}$ است.

$$\text{اندازه تصویر بردار سرعت بر روی محور قطبی} = \frac{dr}{dt}\cos \theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos \frac{\pi}{6} - 4\left(\frac{-1}{2}\right)\sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$